Álgebra y matemática discreta

Nombre: Deisy Jimena

Apellidos: Simanca Castro

09/09/2024

Docente: Iván Darío Maldonado

Actividad: Laboratorio. Implementación del método de eliminación gaussiana por el método del pivotaje parcial escalado

Fundación Universitaria Internacional de La Rioja (UNIR Colombia)

Para este laboratorio decidí utilizar Python para la resolución de una matriz 4x4 con pivotaje parcial escalado y llegando a la resolución de X1, X2, X3, y X4.  
  
Aquí está el código implementado para dicha solución:  
  
import numpy as np

def eliminacion\_gaussiana\_ppe(A, b):

    n = len(A)

    # Matriz extendida

    Ab = np.hstack([A, b.reshape(-1, 1)])  # Agregar la columna del vector b a la matriz A

    # Vector de escala

    escala = np.max(np.abs(A), axis=1)

    for i in range(n-1):

        # Pivotaje parcial escalado

        razones = np.abs(Ab[i:n, i]) / escala[i:n]

        pivot = np.argmax(razones) + i

        if pivot != i:

            # Intercambio de filas

            Ab[[i, pivot], :] = Ab[[pivot, i], :]

            escala[[i, pivot]] = escala[[pivot, i]]

        # Eliminación

        for j in range(i+1, n):

            factor = Ab[j, i] / Ab[i, i]

            Ab[j, i:] = Ab[j, i:] - factor \* Ab[i, i:]

    # Devolver la matriz triangular superior y el vector b modificado

    return Ab[:, :-1], Ab[:, -1]

def sustitucion\_regresiva(U, b):

    n = len(b)

    x = np.zeros(n)

    # Resolver desde la última ecuación hacia atrás

    for i in range(n-1, -1, -1):

        suma = np.dot(U[i, i+1:], x[i+1:])

        x[i] = (b[i] - suma) / U[i, i]

    return x

# Ejemplo de uso

A = np.array([[6.0, -2.0, 2.0, 4.0],

              [12.0, -8.0, 6.0, 10.0],

              [3.0, -13.0, 9.0, 3.0],

              [-6.0, 4.0, 1.0, -18.0]])

b = np.array([ 16.0, 26.0, -19.0, -34.0])

# Limitar la impresión de decimales a 2

np.set\_printoptions(precision=2, suppress=True)

# Imprimir la matriz original y el vector b

print("Matriz original A:")

print(A)

print("Vector original b:")

print(b)

# Paso 1: Obtener la matriz triangular superior y el vector modificado

A\_triangular, b\_modificada = eliminacion\_gaussiana\_ppe(A, b)

print("\nMatriz triangular superior A:")

print(A\_triangular)

print("Vector b modificado:")

print(b\_modificada)

# Paso 2: Sustitución regresiva para obtener los valores de x

x = sustitucion\_regresiva(A\_triangular, b\_modificada)

print("\nSolución del sistema (x1, x2, x3, x4):")

print(x)

A continuación adjunto pruebas del funcionamiento del código:

Aquí podemos ver la matriz A original y el vector B original:

Texto

Descripción generada automáticamente

Luego tenemos la matriz triangular superior y el vector B original:

Texto

Descripción generada automáticamente

Texto

Descripción generada automáticamente

Acá vemos la matriz triangular superior y el vector B modificado:

Texto

Descripción generada automáticamente

Por último, la resolución para X1, X2, X3, y X4

Texto

Descripción generada automáticamente

Ahora para comprobar que el código está bien y la resolución es la correcta, voy a resolver la matriz manualmente

# Sistema de ecuaciones:

6 -2 2 4 = 16

12 -8 6 10 = 26

3 -13 9 3 = -19

-6 4 1 -18 = -34

## Paso 1: Matriz Aumentada Inicial

La matriz aumentada del sistema es:

[6 -2 2 4 | 16 ]

[12 -8 6 10 | 26 ]

[3 -13 9 3 | -19 ]

[-6 4 1 -18 | -34]

## Paso 1.1: Eliminación en la primera columna

Debemos encontrar el factor de escala para cada fila. El factor de escala es el mayor valor absoluto en cada fila (considerando los elementos del lado izquierdo de la barra, es decir, los coeficientes de las incógnitas).

* **Fila 1**: mayor valor absoluto = max(6,2,2,4)=6
* **Fila 2**: mayor valor absoluto = max(12,8,6,10)=12
* **Fila 3**: mayor valor absoluto = max(3,13,9,3)=13
* **Fila 4**: mayor valor absoluto = max(6,4,1,18)=18

Entonces, los factores de escala para cada fila son:

S1=6, S2=12, S3=13, S4=18

## Paso 1.2: Elección del pivote en la columna 1

Dividimos el primer elemento de cada fila por su respectivo factor de escala y elegimos el mayor valor absoluto.

* 6/6 = 1/
* 12/12 = 1
* 3/13 ≈ 0.23
* −6/18 = −1/3 ≈ −0.33

El mayor valor absoluto es 1, y como aparece en la fila 1 y la fila 2, elegimos la **fila 2** como pivote.

**Nueva matriz después del intercambio de filas (intercambiamos fila 1 y fila 2):**

[12 -8 6 10 | 26 ]

[6 -2 2 4 | 16 ]

[3 -13 9 3 | -19 ]

[-6 4 1 -18 | -34]

## Paso 1.2: Eliminación de la columna 1:

Hacemos ceros debajo del pivote de la primera columna (fila 1, columna 1), usando operaciones de fila.

Para la fila 2:

F2 ← F2 − 6/12 F1 = F2 − 0.5F1

Operamos la fila 2:

(6,−2,2,4,∣16) − 0.5(12,−8,6,10,∣26) = (6−6,−2+4,2−3,4−5,∣16−13) = (0,2,−1,−1,∣3)

Para la fila 3:

F3 ← F3 – 3/12 F1 = F3 − 0.25F1

Operamos la fila 3:

(3,−13,9,3,∣−19) − 0.25 (12,−8,6,10,∣26) = (3−3,−13+2,9−1.5,3−2.5,∣−19−6.5) = (0,−11,7.5,0.5,∣−25.5)

Para la fila 4:

F4 ← F4 + 6/12F1 = F4 + 0.5F1

Operamos la fila 4:

## (−6,4,1,−18,∣−34) + 0.5(12,−8,6,10,∣26) = (−6+6,4−4,1+3,−18+5,∣−34+13) = (0,0,4,−13,∣−21)

La matriz resultante después de esta etapa es:

[12 -8 6 10 | 26]

[0 -2 -1 -1 | 3]

[0 -11 7.5 0.5 | -25.5]

[0 0 4 -13 | -21]

## Paso 1.3: Eliminación de la columna 2:

Hacemos ceros debajo del pivote en la columna 2 (fila 2, columna 2).

Para la fila 3:

F3 ← F3 − (−11/2)F2

Operamos la fila 3:

(0,−11,7.5,0.5,∣−25.5) + 5.5(0,2,−1,−1,∣3) = (0,−11+11,7.5−5.5,0.5−5.5,∣−25.5+16.5) = (0,0,2,−5,∣−9)

La fila 4 ya tiene un 0 en la columna 2, por lo que no necesita cambio.

La matriz es ahora:

[12 -8 6 10 | 26]

[0 -2 -1 -1 | 3]

[0 0 2 -5 | -9]

[0 0 4 -13 | -21]

## Paso 1.4: Eliminación de la columna 3:

Hacemos ceros debajo del pivote en la columna 3 (fila 3, columna 3).

Para la fila 4:

F4 ← F4 − 4/2F3

Operamos la fila 4:

(0,0,4,−13,∣−21) − 2(0,0,2,−5,∣−9) = (0,0,4−4,−13+10,∣−21+18) = (0,0,0,−3,∣−3)

La matriz queda como:

[12 -8 6 10 | 26]

[0 -2 -1 -1 | 3]

[0 0 2 -5 | -9]

[0 0 0 -3 | -3]

## Paso 2: Sustitución hacia atrás

Ahora resolvemos el sistema usando sustitución hacia atrás.

De la fila 4: −3x4=−3, por lo tanto, x4=1

De la fila 3: 2x3−5x4=−9, sustituyendo x4=1:2x3−5 = −9, 2x3 =−4, por lo tanto, x3 = −2

De la fila 2: 2x2−x3−x4=3, sustituyendo x3=−2 y x4=1: 2x2 + 2 – 1 = 3, 2x2 ​= 2, por lo tanto, x2=1

De la fila 1: 12x1- 8x2 + 6x3 + 10x4 = 26 sustituyendo x2 = 1 x3=−2 x4=1 : 12x1 -8 -12 +10 = 26, por lo tanto x1 = 3

## Solución Final:

**Ecuaciones correspondientes:**

1. 12x1−8x2+6x3+10x4 = 26
2. 2x2−x3−x4 = 3
3. 2x3−5x4 = −9
4. −3x4 = −3

**Paso 1: Resolver para x4**

De la ecuación 4:

−3x4=−3  ⟹  x4= 1

**Paso 2: Resolver para x3**

Usamos la ecuación 3:

2x3−5x4 = −9

Sustituimos x4=1

2x3−5(1) = −9  ⟹  2x3−5 = −9  ⟹  2x3 = −4  ⟹  x3=−2

**Paso 3: Resolver para x2**

Usamos la ecuación 2:

2x2−x3−x4=3

Sustituimos x3 = −2 y x4=1

2x2−(−2)−1=3  ⟹  2x2+2−1=3  ⟹  2x2+1=3  ⟹  2x2=2  ⟹  x2=1

**Paso 4: Resolver para x1**

Usamos la ecuación 1:

12x1−8x2+6x3+10x4=26

Sustituimos x2=1, x3=−2 y x4=1

12x1−8(1)+6(−2)+10(1)=26  ⟹  12x1−8−12+10=26

Simplificando:

12x1−10=26  ⟹  12x1=36  ⟹  x1=3

**Solución final:**

Las incógnitas son:

x1=3, x2=1, x3=−2, x4=1

**Conclusiones**

1. **Optimización en la resolución de sistemas:** La eliminación gaussiana permite resolver sistemas de ecuaciones lineales de manera eficiente, lo cual es fundamental en aplicaciones de ingeniería, física y matemáticas aplicadas.
2. **Estabilidad numérica:** El pivotaje parcial escalado mejora la estabilidad de los cálculos al minimizar errores numéricos que podrían surgir por divisiones entre números pequeños, asegurando resultados más precisos.
3. **Versatilidad y aplicabilidad:** Dominar estos métodos facilita el análisis y resolución de problemas en distintas áreas como las simulaciones computacionales, donde los sistemas de ecuaciones lineales son recurrentes.